ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 7. ფუნქციონალური მოდელები ეკონომიკაში.

ქვემოთმოყვანილ ცხრილში მოცემულია სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ ლექცია 7-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები № **7.1.- 7.10.**

1	2	3-ა	3-ბ, გ	4	5	6	7	8	9
10									

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

7.1.
კახეთში გვალვის დროს წყლის არამიზნობრივი ხარჯვის შესამცირებლად სამხარეო ადმინისტრაციამ მიიღო გადაწყვეტილება, წყალზე გადასახადის გაზრდის თაობაზე. მან ოთხსულიან ოჯახს დაუწესა ყოველთვიური განაკვეთი შემდეგი სქემით: 1.22 ლარი ყოველი 100 დეკალიტრ წყალზე პირველი 1200 დეკალიტრისათვის. 10 ლარი ყოველ 100 დეკალიტრზე შემდეგი 1200 დეკალიტრისათვის და ამის შემდგომ 50 ლარი ყოველ მომდევნო 100 დეკალიტრზე. გამოსახეთ ყოველთვიური წყლის გადასახადის ფუნქცია ოთხსულიანი ოჯახისათვის, როგორც მოხმარებული წყლის რაოდენობის ფუნქცია.

ამოხსნა. საანგარიშო თვის განმავლობაში მოხმარებული წყლის რაოდენობა დეკალიტრებში აღვნიშნოთ x -ით, ხოლო გადასახდელი თანხის რაოდენობა ლარებში, რომელიც ცხადია მოხმარებული წყლის რაოდენობაზეა დამოკიდებული – $f(x)$-ით.

I შემთხვევა $\boldsymbol{x \leq 1200}$.
რადგან ყოველ 100 დეკალიტრ წყალზე, ამ შემთხვევაში, გადასახდელია 1.22 ლარი, ამიტომ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ თითოეულ დეკალიტრზე გადასახდელი იქნება 0.0122 ლარი. შესაბამისად $\boldsymbol{x}$ დეკალიტრზე გადასახდელი იქნება $0.0122 \cdot \boldsymbol{x}$ ლარი. ამგვარად, თვეში გადასახდელი თანხა იანგარიშება ფორმულით

$$f(x) = 0.0122 \cdot \boldsymbol{x} \qquad (1).$$

II შემთხვევა $\boldsymbol{1200} < x \leq 2400$.
ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ გადასახდელი თანხა შედგება ორი ნაწილისაგან:
პირველი ნაწილი ესაა უკვე დახარჯული 1200 დეკალიტრის ღირებულება, რომელიც უნდა ვიანგარიშოთ (1) ფორმულით და შეადგენს $f(1200) = 0.0122 \cdot 1200 = 14.64$ ლარს. **მეორე** ნაწილი კი ესაა თანხა, რომელიც გადასახდელია 1200 დეკალიტრზე მეტი წყლის მოხმარებისათვის.

წყლის ეს რაოდენობა ცხადია $x - 1200$ დეკალიტრია. რადგან თითოეული ასეთი დეკალიტრის ფასი $\frac{10}{100} = 0.1$ ლარია, ამიტომ ეს თანხა შეადგენს $(x - 1200) \cdot 0,1$ ლარს. ამდენად, თვეში მთლიანი გადასახადის დაანგარიშება მოხდება ფორმულით:

$$f(x) = (x - 1200) \cdot 0,1 + 14.64 \quad (2)$$

III შემთხვევა $x > 2400$ **.**

ამ შემთხვევაშიც გადასახდელი თანხა შედგება ორი ნაწილისაგან: **პირველი** ნაწილი ესაა უკვე დახარჯული 2400 დეკალიტრის ღირებულება, რომელიც უნდა ვიანგარიშოთ (2) ფორმულით და შეადგენს $f(2400) = (2400 - 1200) \cdot 0,1 + 14.64 = 134.64$ ლარს. **მეორე** ნაწილი კი ესაა თანხა, რომელიც გადასახდელია 2400 დეკალიტრზე მეტი წყლის მოხმარებისათვის. წყლის ეს რაოდენობა ცხადია $x - 2400$ დეკალიტრია. რადგან თითოეული დეკალიტრის ფასი ამ შემთხვევაში $\frac{50}{100} = 0.5$ ლარია, ამიტომ ეს თანხა შეადგენს $(x - 2400) \cdot 0,5$ ლარს . მთლიანი გადასახადი ლარებში ამ შემთხვევაში კი გამოითვლება ფორმულით:

$$f(x) = (x - 2400) \cdot 0,5 + 134.64 \quad (3)$$

თუ ამ მსჯელობებს შევაჯამებთ. მივიღებთ, რომ საძიებელ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე.

$$f(x) = \begin{cases} 0.0122 \cdot x, & 0 \le x \le 1200 \\ (x - 1200) \cdot 0,1 + 14.64, & 1200 < x \le 2400 \\ (x - 2400) \cdot 0,5 + 134.64, & x > 2400 . \end{cases}$$

პასუხი: $f(x) = \begin{cases} 0.0122 \cdot x, & 0 \le x \le 1200 \\ (x - 1200) \cdot 0,1 + 14.64, & 1200 < x \le 2400 \\ (x - 2400) \cdot 0,5 + 134.64, & x > 2400 \end{cases}.$

7.3.

ფირმის მიერ წარმოებული პროდუქტის ერთი ერთეულის სარეალიზაციო ფასი 110 ლარია. ამ პროდუქტის საწარმოებლად ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს 7500 ლარს, ხოლო ცვლადი დანახარჯი 60 ლარს.

(ა) პროდუქციის რა რაოდენობა უზრუნველყოფს ნულოვან ზღვარზე მუშაობას?

ამოხსნა. ვთქვათ ფირმის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა არის Q ერთეული. მაშინ ცხადია, რომ მთლიანი ცვლადი დანახარჯი ტოლი იქნება $60 \cdot Q$ ლარის, ამიტომ წარმოების მთლიანი დანახარჯი გამოვა $7500 + 60 \cdot Q$ ლარი. გარდა ამისა, Q ერთეული პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად ამონაგები თანხა იქნება $110 \cdot Q$ ლარი. ამდენად მოგება ამ შემთხვევაში გამოვა $110 \cdot Q - (7500 + 60 \cdot Q)$ ლარი.

ნულოვან ზღვარზე მუშაობის დროს ცხადია მოგება ნულის ტოლია, აქედან გამომდინარე, მიიღება განტოლება

$$110 \cdot Q - (7500 + 60 \cdot Q) = 0.$$

რომლის ამოხსნაც გვაძლევს:

$$110 \cdot Q - 60 \cdot Q = 7500.$$
$$50 \cdot Q = 7500$$
$$Q = 150.$$

სწორედ 150 ერთეული არის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს ნულოვან ზღვარზე მუშაობას.

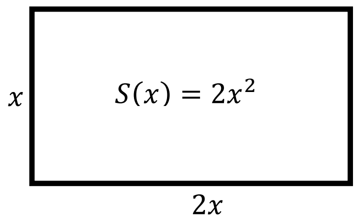
პასუხი: $Q = 150$ ერთეულს.

7.5.
ორი რიცხვის ჯამია 18. გამოსახეთ ამ რიცხვების ნამრავლი, როგორც მცირე რიცხვის ფუნქცია.

ამოხსნა.
თუ ორი რიცხვის ჯამი 18-ია, მაშინ ამ ორი რიცხვიდან ერთი მაინც არ აღემატება 9-ს (წინააღმდეგ შემთხვევაში ჯამი 18-ზე მეტი იქნება). აღვნიშნოთ ეს რიცხვი x-ით. მეორე კი y ით. ცხადია რომ მართებულია უტოლობა: $x \leq y$ და ცხადია ისიც, რომ სრულდება ტოლობა $y = 18 - x$. ამიტომ, ამ ორი რიცხვის ნამრავლი გამოისახება ტოლობით: $x \cdot y = x \cdot (18 - x)$. ამრიგად, საძიებელი ფუნქცია არის ის ფუნქცია, რომელიც მოიცემა $\boldsymbol{f(x)} = x \cdot (18 - x)$ ფორმულით და რომლის განსაზღვრის არე (-∞, 9] რიცხვითი შუალედია.
პასუხი: $\boldsymbol{f(x)} = x \cdot (18 - x),\ x \leq\ 9.$

7.7.
დიზაინერს სურს გააკეთოს მართკუთხედის ფორმის ყვავილების ბაღი, რომლის სიგრძე ორჯერ მეტია სიგანეზე. გამოსახეთ ბაღის ფართობი, როგორც მისი სიგანის ფუნქცია.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ მართკუთხედის სიგანე x-ით. ცხადია. რომ x ცვლადის ცვლილების არეა $(0, +\infty)$ შუალედი. პირობის თანახმად მართკუთხედის სიგრძე $2x$-ის ტოლი იქნება. ამიტომ ცხადია მართკუთხედის ფარობი, როგორც სიგრძისა და სიგანის ნამრავლი დამოკიდებულია x სიდიდეზე და ეს ფუნქციონალური დამოკიდებულება შემდეგნაირად ჩაიწერება $S(x) = 2x^2,\ \ x > 0$



პასუხი:. $S(x) = 2x^2,\ \ x > 0.$

შენიშვნა: ცხადია, ეს ამოცანა ფაქტიურად განხილულია ზოგადად, აბსტრაქტული მართკუთხედისათვის და არა ნამდვილი, რეალური ბაღისათვის, თორემ რეალური ბაღის ზომები რა თქმა უნდა ყოველთვის შეზღუდულია და x ცვლადის ცვლილების არე $(0, +\infty)$ შუალედის ნაცვლად სინამდვილეში რომელიმე $(0, a)$ ტიპის შუალედი იქნება, სადაც a რაიმე დადებითი რიცხვია.

7.9.
დახურული ცილინდრის ფორმის ქილის ზედაპირის ფართობია $120\pi r$ კვ. ერთეული. სადაც r ცილინდრის ფუძის რადიუსია. გამოსახეთ ცილინდრის მოცულობა, როგორც რადიუსის ფუნქცია.

ამოხსნა. ვიცით, რომ ცილინდრის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა გამოითვლება

$$S_{ზედ} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \text{და} \qquad V = \pi r^2 h$$

ფორმულებით, სადაც r ცილინდრის ფუძის რადიუსი, h კი ცილინდრის სიმაღლეა. პირობის თანახმად მართებულია ტოლობა:

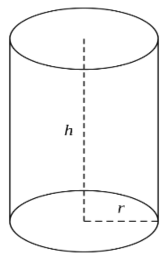
$$120\pi r = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

ამ ტოლობის $2\pi r$-ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ

$$60 = r + h$$

გამოვსახოთ აქედან h სიმაღლე r-ის საშუალებით,

$$h = 60 - r.$$



ახლა თუ h-ის ამ მნიშვნელობას ცილინდრის მოცულობის ფორმულაში h-ის ნაცვლად ჩავსვამთ, მივიღებთ საძიებელ გამოსახულებას:

$$V = \pi r^2 (60 - r).$$

პასუხი: $V = \pi r^2 (60 - r).$